

Devoir sur Table 1

Durée : 4h

1. Les exercices sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.
2. Tous les documents sur papier sont interdits.
3. Les calculatrices ne sont pas autorisées.
4. Le matériel de géométrie (règle, compas, équerre) est autorisé.
5. La notation des copies tiendra compte dans une large mesure de la qualité de la rédaction. Ceci implique que vous devez faire des raisonnements clairs, concis et complets, utiliser un langage mathématiques adapté et précis, être lisible et éviter les fautes d'orthographe et de grammaire.
6. Si, au cours du devoir, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous le signalez sur votre copie et poursuivez sa composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.
7. Mettez en évidence vos résultats en les encadrant ou les soulignant.

Exercice 1*(Oral Banque PT)*

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de six boules numérotées de 1 à 6.

Au début de l'expérience, il y a deux boules dans U_1 et quatre dans U_2 .

On dispose également d'un dé équilibré à six faces. À chaque étape on va lancer le dé puis on change d'urne la boule portant le même chiffre que le dé.

Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules dans U_1 après le lancer n .

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = 5)$.
4. Soit $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de X_n .
5. Montrer que $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$.
6. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et la limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2*(Banque PT, Maths A, 2023)*

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I_3 + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et I_3 est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.

On considère ici les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer N^2 et N^3 .
- (b) Déterminer le rang de $A - I_3$.

- (c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
- (d) Calculer PBP^{-1} .
- (e) Déterminer une expression explicite de B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- (f) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.
- (g) En déduire une expression explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Étude de $\mathcal{N}$.
- (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
- (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.
- (c) Calculer N^3 pour $N \in \mathcal{N}$.
3. Étude de $\mathcal{U}$.
- (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On justifiera la réponse.
- (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
- (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} N^2$$

On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

- (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, où B est la matrice définie à la question 1.
- (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
- (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

- (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = \underbrace{U \times \dots \times U}_{n \text{ fois}}$
- (e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geq 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$?
- (f) Montrer que $U^{(-1)} = U^{-1}$.
5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique?
- (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice D).

Exercice 3

(Banque PT, Maths C, 2014)

Partie I

Dans cette partie, on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n(t) = e^t - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}$$

1. (a) Montrer que R_n est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = \frac{t^n}{n!} \quad (\mathcal{E})$$

- (b) Donner la solution générale de l'équation sans second membre $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$.
- (c) Résoudre $(\mathcal{E})$ (on exprimera les solutions à l'aide d'une intégrale qu'on ne cherchera pas à calculer).
- (d) En déduire une expression de $R_n(t)$ pour tout réel t et tout entier naturel n à l'aide d'une intégrale.
- (e) Montrer que, pour tout réel positif t :

$$|R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1}e^t}{(n+1)!}$$

- (f) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

2. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n} \frac{1}{n!}$$

- (a) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones, et donner leur sens de variation.
- (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- (c) En déduire que, pour tout entier naturel non nul q :

$$u_q < e < v_q$$

- (d) On cherche à montrer que e est irrationnel. A cet effet, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p et q , premiers entre eux, tels que :

$$e = \frac{p}{q}$$

En multipliant la double inégalité précédente par $q!$, montrer que c'est impossible, et conclure sur l'irrationalité de e .

- (e) On considère la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

- i. Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$|u_n - e| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

- ii. Montrer qu'il existe un rang, n_1 tel que pour tout entier $n \geq n_1$:

$$|w_n - e| \leq \varepsilon$$

- iii. Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

3. On considère la suite $(e_n)_{n \geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad e_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Partie II

On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. telle que :

$$g(0) = 0, \quad \forall x \in]0, 1] \quad g(x) = x \ln(x)$$

1. Étudier la continuité et les variations de la fonction g , puis tracer sa courbe représentative sur $[0, 1]$ sur le papier millimétré joint, en prenant pour unité 10 cm sur l'axe des abscisses comme sur l'axe des ordonnées

2. En déduire que $M = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$ existe et donner sa valeur.

3. On définit la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $t_0 \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$ et pour tout entier naturel n :

$$t_{n+1} = -g(t_n)$$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Rappeler l'inégalité de Taylor-Lagrange.

5. Montrer que, pour tout réel $x \in [t_0, e^{-1}]$:

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{|x - e^{-1}|^2}{2t_0}$$

6. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n :

$$|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{e^{-1} - t_0}{2t_0} \right)^{2^n}$$

7. Quelle est la limite de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Corrigé

Corrigé de l'exercice 1

1. Au début de l'expérience, il y a deux boules dans U_1 et quatre dans U_2 .

Si on tire l'un des numéros de l'un des boules présentes dans U_1 alors $X_1 = 1$ et si on tire un des numéros d'une des boules de U_2 alors $X_1 = 3$.

Ainsi on a $X_1(\Omega) = \{1, 3\}$ et

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 3) = \frac{2}{3}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$$

2. X_{n+1} ne peut valoir 0 que si $X_n = 1$.

Si $X_n = 1$ alors X_{n+1} vaut 0 si et seulement si on tire le numéro de la seule boule présente dans U_1 . Ainsi $\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 1)$.

3. X_{n+1} ne peut valoir 6 que si $X_n = 5$.

Si $X_n = 5$ alors X_{n+1} vaut 6 si et seulement si on tire le numéro de la seule boule présente dans U_2 . Ainsi $\mathbb{P}(X_{n+1} = 6) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n = 5)$.

4. Soit $k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

D'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=0}^6 \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = i) \mathbb{P}(X_n = i) \\ &= \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k-1) \mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = k+1) \mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \frac{6-(k-1)}{6} \mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} \mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \frac{7-k}{6} \mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} \mathbb{P}(X_n = k+1) \end{aligned}$$

Lien entre X_n et X_{n+1}

On a $\mathbb{P}(X_{n+1} = k | X_n = i) = 0$ si $i \notin \{k-1, k+1\}$

On a donc

$$\forall k \in \llbracket 1, 5 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6} \mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} \mathbb{P}(X_n = k+1)$$

5. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}) &= 0\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + 6\mathbb{P}(X_{n+1} = 6) + \sum_{k=1}^5 k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=1}^5 k \left(\frac{7-k}{6} \mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} \mathbb{P}(X_n = k+1) \right) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=1}^5 \frac{k(7-k)}{6} \mathbb{P}(X_n = k-1) + \sum_{k=1}^5 \frac{k(k+1)}{6} \mathbb{P}(X_n = k+1) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) + \sum_{k=0}^4 \frac{(k+1)(6-k)}{6} \mathbb{P}(X_n = k) + \sum_{k=2}^6 \frac{k(k-1)}{6} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \mathbb{P}(X_n = 5) - \mathbb{P}(X_n = 5) - 0\mathbb{P}(X_n = 6) - 0\mathbb{P}(X_n = 0) - 0\mathbb{P}(X_n = 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^6 \frac{(k+1)(6-k)}{6} \mathbb{P}(X_n = k) + \sum_{k=0}^6 \frac{k(k-1)}{6} \mathbb{P}(X_n = k) \\
& = \sum_{k=0}^6 \frac{5k - k^2 + 6 + k^2 - k}{6} \mathbb{P}(X_n = k) \\
& = \sum_{k=0}^6 \frac{4k + 6}{6} \mathbb{P}(X_n = k) \\
& = \sum_{k=0}^6 \mathbb{P}(X_n = k) + \frac{2}{3} \sum_{k=0}^6 \mathbb{P}(X_n = k) \\
& = 1 + \frac{2}{3} \mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3} \mathbb{E}(X_n)$$

6. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.

Posons $r = 3$ de sorte que $r = 1 + \frac{2}{3}r$, on a alors

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) - r = 1 + \frac{2}{3} \mathbb{E}(X_n) - \left(1 + \frac{2}{3}r\right) = \frac{2}{3} (\mathbb{E}(X_n) - r)$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n) - 3)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_n) = 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (\mathbb{E}(X_1) - 3)$$

i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}(X_n) = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n) = 3$.

Corrigé de l'exercice 2

1. (a) On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } N^3 = 0_3$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
\text{Rang}(A - I_3) &= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Rang} \left(\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

On a donc $\text{Rang}(A - I_3) = 2$.

(c) On a

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Ainsi $\boxed{P \text{ est inversible}}$. On l'inverse via la méthode de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_3 \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) L_2 \leftarrow -L_2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(d) On a

$$\begin{aligned} PBP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{PBP^{-1} = A}$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $B = I_3 + N$, d'où, puisque I_3 et N commutent,

$$\begin{aligned} B^n &= (I_3 + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I_3^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 \\ &= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & -2n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Coefficients binomiaux
Par convention
 $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & -2n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(f) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$ on a $A^0 = I_3$ et $PB^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. L'égalité est donc vraie pour $n = 0$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $A^n = PB^nP^{-1}$.

Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = PBP^{-1}PB^nP^{-1} = PB^{n+1}P^{-1}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1}$.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2n & -2n(n-1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 1-2n(n-1) \\ 1 & 2n-1 & 2n(2-n)-1 \\ 1 & 2n & -2n(n-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2n^2 & -2n & 2n+2n^2 \\ 2n-2n^2 & 1-2n & 2n^2 \\ -2n^2 & -2n & 2n^2+2n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1-2n^2 & -2n & 2n+2n^2 \\ 2n-2n^2 & 1-2n & 2n^2 \\ -2n^2 & -2n & 2n^2+2n+1 \end{pmatrix}$$

2. (a) On constate aisément que $\mathcal{N} = \text{Vect}(N_1, N_2, N_3)$

avec

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathcal{N}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La famille (N_1, N_2, N_3) est génératrice de $\mathcal{N}$. Vérifions qu'elle est également libre.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aN_1 + bN_2 + cN_3 = 0_3$, i.e. $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$. On a alors

$a = b = c = 0$, la famille (N_1, N_2, N_3) est libre.

Finalement la famille (N_1, N_2, N_3) est une base de $\mathcal{N}$ et donc $\dim(\mathcal{N}) = 3$.

(b) Soit (N, M) dans $\mathcal{N}^2$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^6$.

On a alors $NM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et donc $NM \in \mathcal{N}$.

Ainsi $\mathcal{N}$ est stable par produit.

(c) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{N}$.

On a alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \times c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Ainsi

$$\boxed{\forall N \in \mathcal{N}, \quad N^3 = 0}$$

3. (a) Un élément de $\mathcal{U}$ a sa diagonale constituée de 1, il ne peut donc pas être nul. Donc $\mathcal{U}$ ne contient pas la matrice nulle. Donc $\boxed{\mathcal{U} \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

- (b) Soit $U_1 = I_3 + N_1$ et $U_2 = I_3 + N_2$ où $(N_1, N_2) \in \mathcal{N}^2$ deux éléments de $\mathcal{U}$, alors :

$$U_1 U_2 = (I_3 + N_1)(I_3 + N_2) = I_3 + N_1 + N_2 + N_1 N_2$$

or $N = N_1 + N_2 + N_1 N_2 \in \mathcal{N}$ car $\mathcal{N}$ est stable par combinaison linéaire et produit. Donc $U_1 U_2 \in \mathcal{U}$

Ainsi $\boxed{\mathcal{U} \text{ est stable par produit.}}$

- (c) Les éléments de $\mathcal{U}$ sont des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale.

Leur déterminant vaut donc 1, elles sont ainsi inversibles. D'où $\boxed{\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})}$

4. (a) On a $B = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D'où

$$B^{(\alpha)} = I_3 + \alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 2\alpha(1-\alpha) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad B^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha & 2\alpha(1-\alpha) \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

- (b) Soit $U = I_3 + N \in \mathcal{U}$,

Comme $\mathcal{N}$ est stable par produit et combinaison linéaire on a $\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{N}$ et donc

$$U^{(\alpha)} = I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \in \mathcal{U}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}}$$

- (c) Soit $U = I_3 + N \in \mathcal{U}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

On a alors

$$\begin{aligned} U^{(\alpha)} U^{(\beta)} &= \left(I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 \right) \left(I_3 + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2 \right) \\ &= I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2 + \beta N + \frac{\beta(\beta-1)}{2} N^2 \\ &\quad + \alpha\beta N^2 + \frac{\alpha\beta(\beta-1)}{2} N^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta\alpha(\alpha-1)}{2}N^3 + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{4}N^4 \\
& = I_3 + (\alpha + \beta)N + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha - \beta}{2}N^2 \quad \text{car } N^3 = 0_3 \\
& = I_3 + (\alpha + \beta)N + \frac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \beta)}{2}N^2 \\
& = I_3 + (\alpha + \beta)N + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)}{2}N^2 \\
& = U^{(\alpha+\beta)}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{U}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad U^{(\alpha)}U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)}}$$

On a également

$$\begin{aligned}
\left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} & = \left(I_3 + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^{(\beta)} \\
& = I_3 + \beta \left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right) + \frac{\beta(\beta-1)}{2} \left(\alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}N^2\right)^2 \\
& = I_3 + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1)}{2}N^2 + \frac{\alpha^2\beta(\beta-1)}{2}N^2 + 0_3 \\
& = I_3 + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1) + \beta(\beta-1)\alpha^2}{2}N^2 \\
& = I_3 + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha-1 + \alpha\beta - \alpha)}{2}N^2 \\
& = I_3 + \alpha\beta N + \frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}N^2 \\
& = U^{(\alpha\beta)}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\forall U \in \mathcal{U}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}}$$

(d) Soit $U = I_3 + N \in \mathcal{U}$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U^{(n)} = U^n$

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a $U^{(1)} = I_3 + 1 \times N + \frac{1 \times (1-1)}{2}N^2 = U = U^1$, donc la propriété est vérifiée au rang 1.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $U^{(n)} = U^n$ et montrons que $U^{(n+1)} = U^{n+1}$

On a alors

$$\begin{aligned}
U^{(n+1)} & = U^{(n)}U^{(1)} && \text{d'après la question précédente} \\
& = U^n U && \text{d'après l'hypothèse de récurrence et l'initialisation} \\
& = U^{n+1}
\end{aligned}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U^{(n)} = U^n}$$

(e) Pour $n \geq 2$ entier, comme I et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$U^n = (I_3 + N)^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{n}{k} N^k \\
&= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 \\
&= I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\
&= U^{(n)}
\end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$ on retrouve bien l'égalité $U^{(n)} = U^n$.

Le résultat pour $n = 1$ a été vu dans l'initialisation de la question précédente. Pour $n = 0$, on a $U^0 = I_3$ et $U^{(0)} = I_3 + 0 \times N + \frac{0 \times (-1)}{2} N^2 = I_3$.

Ainsi la relation reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

(f) On a, à l'aide de la question 4.(c),

$$U^{(-1)}U = U^{(-1)}U^{(1)} = U^{(-1+1)} = U^{(0)} = I_3$$

Ainsi U est inversible et $U^{-1} = U^{(-1)}$.

5. (a) D'après la question 4.(c) on a

$$B = B^1 = B^{(1)} = B^{(\frac{1}{2} \times 2)} = \left(B^{(\frac{1}{2})}\right)^{(2)}$$

Ainsi pour $C = B^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on bien $C^2 = B$.

On remarque que $-C$ convient aussi et donc il n'y a pas unicité.

(b) On a $A = PBP^{-1} = PC^2P^{-1} = PCP^{-1}PCP^{-1} = (PCP^{-1})^2$

Et donc $D = PCP^{-1}$ vérifie $D^2 = A$.

Corrigé de l'exercice 3

Partie I

1. (a) Dans l'expression de R_n , la somme est finie et se dérive donc terme à terme. On trouve

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R'_n(t) = R_{n-1}(t)$$

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R'_n(t) - R_n(t) = R'_n(t) - \left(R_{n-1}(t) - \frac{t^n}{n!}\right) = R'_n(t) - R_{n-1}(t) + \frac{t^n}{n!} = 0 + \frac{t^n}{n!} = \frac{t^n}{n!}$$

Et donc R_n est bien solution de $(\mathcal{E})$.

(b) Les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont de la forme $t \mapsto Ae^t$, A étant une constante réelle.

(c) Appliquons la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de $(\mathcal{E})$ sous la forme $y_p : t \mapsto A(t)e^t$, A étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'_p(t) - y_p(t) = A'(t)e^t$$

y_p est alors solution si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad A'(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}$$

Ainsi $A : t \mapsto \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$ convient.

On peut donc choisir $y_p : t \mapsto e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$ comme solution particulière de $(\mathcal{E})$, et alors

L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E})$ est

$$\left\{ y : t \mapsto e^t \left(A + \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du \right), A \in \mathbb{R} \right\}$$

- (d) On a $R_n(0) = 0$, R_n est donc l'unique solution de $(\mathcal{E})$ qui s'annule en 0, ce qui correspond à $A = 0$. Ainsi :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad R_n(t) = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du$$

- (e) Soit $t \geq 0$,

Comme, pour tout $u \in [0, t]$, $e^{-u} \times \frac{u^n}{n!} \geq 0$ on en déduit par positivité de l'intégration que $R_n(t) \geq 0$ et donc $|R_n(t)| = R_n(t)$

De plus, pour u entre 0 et t , on a $e^{-u} \leq 1$, puis u étant positif, on en déduit :

$$\forall u \in [0, t], \quad e^{-u} \times \frac{u^n}{n!} \leq 1 \times \frac{u^n}{n!}$$

Il vient donc, par croissance de l'intégrale, $\int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du \leq \int_0^t \frac{u^n}{n!} du$, c'est-à-dire

$$\int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

D'où :

$$\forall t \geq 0, \quad |R_n(t)| \leq \frac{t^{n+1} e^t}{(n+1)!}$$

- (f) Commençons par reprendre et adapter le raisonnement précédent lorsque t est négatif : dans ce cas, en posant le changement de variable affine $v = -u$, on a

$$R_n(t) = e^t \int_0^t \frac{u^n}{n!} e^{-u} du = -e^t \int_0^{-t} \frac{(-v)^n}{n!} e^v dv$$

Ainsi $R_n(t) = (-1)^{n+1} e^t \int_0^{-t} \frac{v^n}{n!} e^v dv$.

Il faut majorer cette fois-ci e^v par e^{-t} ; les bornes de cette intégrale sont bien dans l'ordre croissant donc $\int_0^{-t} \frac{v^n}{n!} e^v dv \leq \int_0^{-t} \frac{v^n}{n!} e^{-t} dv$ C'est-à-dire

$$\int_0^{-t} \frac{v^n}{n!} e^v dv \leq \frac{(-t)^{n+1} e^{-t}}{(n+1)!}$$

On obtient cette fois-ci :

$$\forall t \leq 0, \quad |R_n(t)| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|t|^{n+1} e^{|t|}}{(n+1)!}$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

On aurait aussi pu exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0, x]$.

On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |R_n(t)| \leq \frac{|t|^{n+1} e^{|t|}}{(n+1)!}$$

On sait que par croissances comparées, pour t réel fixé, $\frac{|t|^{n+1} e^{|t|}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par encadrement on en déduit que $|R_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Autrement dit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} = e^t$.

Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t$$

2. (a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des sommes partielles d'une série à termes strictement positifs, elle est donc clairement strictement croissante.

Ainsi La suite (u_n) est strictement croissante.

Calculons pour n entier naturel non-nul $v_{n+1} - v_n$:

Ou encore plus simplement :
 $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{n(n+1)((n+1)!)} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)((n+1)!)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (v_n) est strictement décroissante.

- (b) Nous avons deux suites monotones de sens contraires, il ne reste qu'à prouver que leur différence tend vers zéro. Or $v_n - u_n = \frac{1}{n} \frac{1}{n!}$ tend clairement vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Ainsi Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

- (c) Les deux suites étant adjacentes, elles convergent vers la même limite.

D'après la question 1.(f) (avec $t = 1$), la suite (u_n) converge vers e . De plus (u_n) croît strictement vers e tandis que (v_n) décroît strictement vers e , Ainsi :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad u_q < e < v_q$$

- (d) On suppose $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers. En multipliant la relation précédente par $q!$ on obtient

$$q!u_q < p(q-1)! < q!v_q = q!u_q + \frac{1}{q}$$

Or, $q!u_q = \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!}$. Chaque terme de cette somme est un entier, donc $N_0 = q!u_q \in \mathbb{N}$.

Or $N_1 = p(q-1)!$ est aussi un entier, et $\frac{1}{q} \leq 1$. On a donc obtenu $N_0 < N_1 < N_0 + 1$ avec N_0 et N_1 entiers ce qui est impossible. Par l'absurde, on en déduit que e est irrationnel.

- (e) i. Comme (u_n) tend vers e , la définition de la limite s'écrit :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - e| \leq \varepsilon_1$$

En prenant $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$,

on peut affirmer qu'il existe un rang n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on a : $|u_n - e| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

ii. Soit n_0 convenant pour la question précédente et $n \geq n_0$ entier naturel.

notons $A = \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - e|$ alors

$$w_n - e = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0} (u_k - e) + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0+1}^n (u_k - e)$$

D'où

$$|w_n - e| \leq \frac{A}{n} + \frac{1}{n}(n - n_0) \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Or $\frac{A}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe donc un rang n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $A_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Il existe donc un rang n_1 tel que pour tout entier $n \geq n_1$, $|w_n - e| \leq \varepsilon$

iii. On vient de montrer que, pour tout réel strictement positif ε , il existe un entier naturel n_1 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_1$, on a : $|w_n - e| \leq \varepsilon$. C'est exactement la définition de la limite d'une suite, ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = e$$

3. Calculons via l'utilisation d'un développement limité usuel :

$$\begin{aligned} e_n &= \exp \left(-n \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp \left(-n \left(-\frac{1}{n} + o \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp(1 + o(1)) \end{aligned}$$

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = e$

Césàro

On a en fait redémontré dans ce cas particulier le *théorème de Césàro* qui annonce que la limite des moyennes arithmétiques d'une suite est la même que celle de la suite, lorsque celle-ci existe.

Partie II

1. Sur $]0, 1]$ g s'exprime comme le produit d'une fonction polynomiale par la fonction $\ln$, qui sont toutes deux $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. g est donc en particulier continue sur $]0, 1]$.

De plus le cours de première année donne la limite usuelle $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$, i.e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$. Ainsi g est continue en 0.

Finalement g est continue sur $[0, 1]$

Penchons-nous maintenant sur les variations de g . On a déjà justifié que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1]$. On peut donc calculer sa dérivée

$$\forall x \in]0, 1], \quad g'(x) = \ln(x) + 1$$

Ainsi, pour $x \in]0, 1]$, $g'(x) > 0$ si et seulement si $x > e^{-1}$

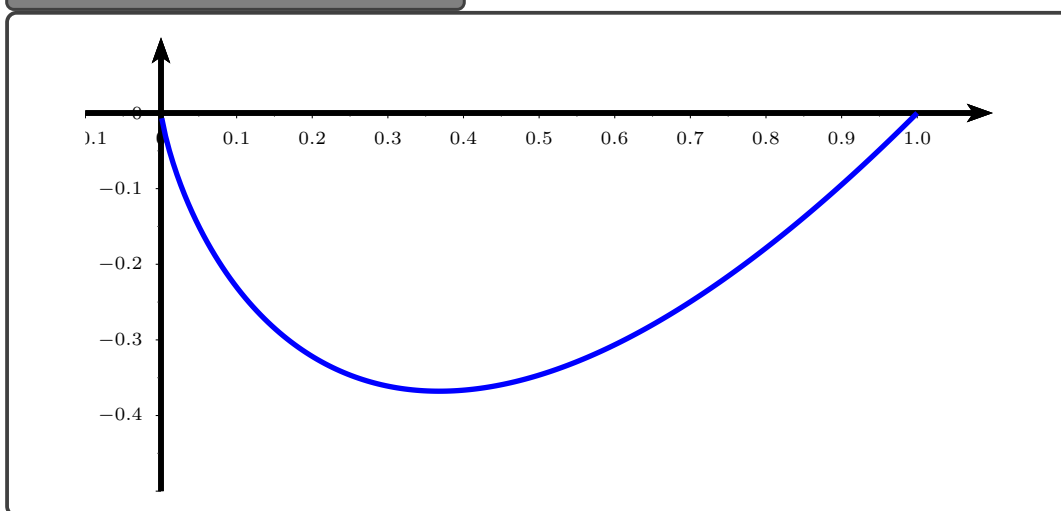
On a donc le tableau de variation suivant

x	0	e^{-1}	1
$f'(x)$	- 0 +		
f	0	$-e^{-1}$	0

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) = -\infty$, la courbe représentative de g présente donc une demi-tangente verticale à droite en $x = 0$.

On obtient le tracé suivant :

Figure .1 – Tracé de la courbe de g



2. D'après l'étude des variations présentée à la question précédente, la fonction g réalise son minimum en e^{-1} , et comme g est négative, $|g|$ réalise un maximum en ce point. Donc :

$$M = \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \text{ existe et vaut } e^{-1}$$

3. D'après la question 1. $-g$ est strictement croissante sur $[0, e^{-1}]$, donc en particulier sur $]\frac{e^{-1}}{3}, e^{-1}[$.

Or

$$-g\left(\frac{e^{-1}}{3}\right) = e^{-1} \frac{1 + \ln(3)}{3} \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$$

$$\text{et } -g(e^{-1}) = e^{-1}, \text{ donc } \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[\text{ est stable par } -g.$$

car $\ln(3) \in]0, 2[$

Par ailleurs, pour $x \in \left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$, on a

$$-g(x) - x = -x(\ln(x) + 1) = -xg'(x) \geq 0$$

D'où, par stabilité de l'intervalle $\left] \frac{e^{-1}}{3}, e^{-1} \right[$ la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_0 \leq t_n \leq t_{n+1} \leq e^{-1}$$

4. Soit f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I et $(a, b) \in I^2$, on suppose l'existence dans $\mathbb{R}$ de $M_{n+1} = \sup_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$. On a alors :
- $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$
5. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction g à l'ordre $n = 1$ sur $I = [t_0, e^{-1}]$, en prenant $a = e^{-1}$ et $b = x \in I$.

Comme $g'(e^{-1}) = 0$, l'expression $f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$ se réduit à $g(x) - g(e^{-1})$

On aura donc

$$|g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{(x - e^{-1})^2}{2} M_2$$

Cherchons la valeur de M_2 . Pour cela calculons g''

$$\forall x \in I, \quad g''(x) = \frac{1}{x}$$

Cette fonction est décroissante et atteint donc son maximum sur I en t_0 . D'où $M_2 = \frac{1}{t_0}$ et on obtient bien :

$$n |g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{(x - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Ceci pour x quelconque dans $[t_0, e^{-1}]$.

Ainsi :

$$\forall x \in [t_0, e^{-1}], \quad |g(x) - g(e^{-1})| \leq \frac{(x - e^{-1})^2}{2t_0}$$

6. Démontrons le résultat attendu par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation :

Pour $n = 1$, on a, d'après la question précédente,

$$|t_n - e^{-1}| = |t_1 - e^{-1}| = |-g(t_0) + g(e^{-1})| = |g(t_0) - g(e^{-1})| \leq \frac{(t_0 - e^{-1})^2}{2t_0}$$

Or *

$$\frac{(t_0 - e^{-1})^2}{2t_0} = 2t_0 \frac{(t_0 - e^{-1})^2}{(2t_0)^2} = 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n = 1$.

Hérédité :

Soit $n \geq 1$ un entier, supposons que $|t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n}$ et montrons que :

$$|t_{n+1} - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^{(n+1)}}$$

On a

$$\begin{aligned} |t_{n+1} - e^{-1}| &= |-g(t_n) + g(e^{-1})| \\ &\leq \frac{|t_n - e^{-1}|^2}{2t_0} \quad \text{d'après la question 5. avec } x = t_n \\ &\leq 2t_0 \frac{(t_n - e^{-1})^2}{(2t_0)^2} \\ &\leq 2t_0 \frac{1}{(2t_0)^2} \left(2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n} \right)^2 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{aligned}$$

$$\leq 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^{(n+1)}}$$

Ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence

Ainsi

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad |t_n - e^{-1}| \leq 2t_0 \left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n}}$$

7. Comme $t_0 > \frac{e^{-1}}{3} > 0$ on a $\frac{1}{2t_0} < \frac{3}{2e^{-1}}$ et $0 \leq e^{-1} - t_0 < \frac{2}{3}e^{-1}$ et donc $0 < \frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} < 1$.

Par conséquent la suite $\left(\left(\frac{t_0 - e^{-1}}{2t_0} \right)^{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro, et d'après l'encadrement de la question précédente, la suite $(t_n - e^{-1})$ tend aussi vers zéro.

D'où : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = e^{-1}}$.